# 6. Klasse

1. Zahlen

1.1. Brüche und Bruchteile

$$\frac{a}{b} = a : b$$

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Wert des Bruches}$$

1.2.Die Menge der rationalen Zahlen => Die Menge aller Brüche, wobei die Zähler eine beliebige ganze Zahl und die Nenner eine ganze Zahl außer Null sein dürfen nennt man die Menge der rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

1.3. Erweitern Brüchen => Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden (Erweitern).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

1.4. Kürzen von Brüchen => Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert (Kürzen). Ein Bruch ist vollständig gekürzt, wenn Zähler und Nenner keine gemeinsamen Primfaktoren mehr enthalten.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

2. Rechnen mit Brüchen

2.1. Gleichnamige Brüche => Zwei Brüche heißen gleichnamig, wenn beiden den gleichen Nenner haben. Dies kann man durch erweitern oder kürzen erreichen.

2.2. Addition von Brüchen => Zwei gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und die Nenner gleich lässt.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

# 6. Klasse

2.3.Subtraktion von Brüchen => Zwei gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und die Nenner gleich lässt.

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$$

2.4.Multiplikation von Brüchen => Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner rechnet.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

2.5. Kehrwert eines Bruches => Der Kehrwert eines Bruches entsteht, wenn man Zähler und Nenner vertauscht.

$$\frac{b}{a} \text{ heißt } \textit{Kehrwert} \text{ von } \frac{a}{b}$$

2.6.Division von Brüchen => Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Einteilung der Brüche

| | |
|---|---|
| **Stammbrüche:** | Zähler $= 1$ |
| **Echte Brüche:** | Zähler $<$ Nenner |
| **Unechte Brüche:** | Zähler $>$ Nenner |
| **Scheinbrüche:** | Zähler $= n \cdot$ Nenner<br>mit $n \in \mathbb{N}$ |

# 6. Klasse

3. Besondere Brüche

3.1. Gemischte Zahlen => Um die Größe eines unechten Bruches besser zu erkennen, schreibt man ihn als gemischte Zahl. Die gemischte Zahl $a\frac{b}{c}$ ist eine Abkürzung für die Summe $a+\frac{b}{c}$. Hierbei gilt allerdings:

$$-a\frac{b}{c} = -\left(a+\frac{b}{c}\right) = -\frac{a\cdot c+b}{c} = -a-\frac{b}{c}$$

3.2. Doppelbrüche => Bei Doppelbrüchen schreibt man den Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichen.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

3.3. Dezimalbrüche => Bei der dezimalen Schreibweise von rationalen Zahlen geben die Ziffern rechts vom Komma Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, ... an. Schlussnullen nach dem Komma darf man bei einem Dezimalbruch beliebig anhängen oder streichen (Erweitern oder Kürzen).

$$23{,}456 = 2\cdot 10 + 3\cdot 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} =$$
$$= 23\frac{456}{1000} = \frac{23456}{1000} = 23\frac{57}{125} = \frac{2932}{125}$$

3.4. Periodische Dezimalbrüche => Bei periodischen Dezimalbrüchen unterscheidet man in endliche periodische Dezimalbrüche und unendliche periodische Dezimalbrüche.

*3.4.1.* Jeder Dezimalbruch mit n Dezimalen lässt sich als Bruch mit dem Nenner $10^n = 2^n \cdot 5^n$ schreiben. Das bedeutet in der vollständig gekürzten Form des Bruchs hat der Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5.

3.4.2. Ein vollständig gekürzter Bruch, dessen Nenner andere Primfaktoen als 2 und 5 enthält, ist ein periodisch unendlicher Dezimalbruch. Hierbei heißt dieser entweder reinperiodisch, wenn seine Periode direkt nach dem Komma beginnt bzw. gemischt periodisch, wenn zwischen Komma und Periode noch weitere Ziffern stehen.

$$0{,}\underbrace{\overline{\text{Periode}}}_{\text{Länge } p} = \frac{\text{Periode}}{\underbrace{999...9}_{p \text{ mal die } 9}}$$

# 6. Klasse

4. Prozentrechnung

4.1. Umwandlung von Brüchen in die Prozentschreibweise => Jede Zahl a kann man in die Prozentschreibweise umwandeln. Hierbei nennt man den Hundertstel Teil ein Prozent. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$x\,\% = \frac{x}{100}, \quad 1\,\% = \frac{1}{100}, \quad 100\,\% = \frac{100}{100} = 1$$

$$x\% \text{ von } g = x\% \cdot g = \frac{x}{100} \cdot g = \frac{x \cdot g}{100}$$

4.2. Grundgleichung der Prozentrechnung => Bei allen Aufgaben der Prozentrechnung ist es möglich mit Hilfe der Grundgleichung die gesuchten Werte zu bestimmen.

$$\underbrace{Prozentsatz}_{p\%} \; \underbrace{mal}_{\cdot} \; \underbrace{Grundwert}_{G} = \underbrace{Prozentwert}_{P}$$

4.3. Für die Berechnung von Grundwert und Prozentsatz kann man die Grundgleichung nach der gesuchten Größe umstellen.

4.3.1. Berechnung des Prozentsatzes => $p\% = \frac{P}{G}$

4.3.2. Berechnung des Grundwerts => $G = \frac{P}{p\%}$

4.4. Zu einer Zahl a werden $p\%$ addiert, das bedeutet, die Zahl a wird um $p\%$ vergrößert: $a + p\% \cdot a = a \cdot (1 + p\%) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})$

4.5 Von einer Zahl a werden $p\%$ von a subtrahiert, das bedeutet, a wird um $p\%$ verkleinert: $a - p\% \cdot a = a \cdot (1 - p\%) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})$

4.6. Zinsrechnung => Ein Betrag a wird bei einer Bank einbezahlt und jährlich mit $p\%$ verzinst. Nach n Jahren ist der Wert des Kapitals wie folgt berechenbar:

$$x = a \cdot (1 + p\%)^n$$

# 6. Klasse

5. Zufallsexperimente

5.1. Das werfen eines Spielwürfels bzw. einer Münze, das drehen eines Glücksrads usw. sind Vorgänge, deren Ergebnis zufällig, also nicht vorhersagbar ist. Man nennt solche Vorgänge Zufallsexperimente.

5.2. Absolute Häufigkeit => Führt man ein Zufallsexperiment (z.B. werfen einer Münze) mehrmals (n-mal; z.B. n=200) durch und tritt dabei ein bestimmtes Versuchsergebnis (z.B. Zahl) k-mal (z.B. k=102) ein, so bezeichnet man die Anzahl k als die absolute Häufigkeit.

5.3. Relative Häufigkeit => Der Anteil $\frac{k}{n}$ an der Gesamtanzahl n der Durchführungen des Zufallsexperiments heißt relative Häufigkeit dieses Versuchsergebnisses.

5.4. Gesetz der großen Zahlen => Die Erfahrung hat gezeigt, dass sich nach einer großen Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Versuchsergebnisses bei weiteren Durchführungen kaum noch verändert. Das bezeichnet man als Übergang von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit.

6. Der Quader

6.1. Definition des Quaders => Ein Quader wird von sechs Rechtecken begrenzt. Je zwei gegenüberliegende Rechtecke des Quaders sind gleich. Je vier Kanten eines Quaders sind gleich lang. Ein Quader mit lauter gleich langen Kanten heißt Würfel.

6.2. Raummaße => Der Rauminhalt (Volumen) eines Würfels mit der Kantenlänge 1cm ist ein Kubikzentimeter ( $cm^3$ ). Zur Umrechnung des Volumens gilt folgende Tabelle:

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{km}^3 &= (1000\,\mathrm{m})^3 = 10^9\,\mathrm{m}^3\\
1\,\mathrm{m}^3 &= 1000\,\mathrm{dm}^3 = 10^6\,\mathrm{cm}^3 = 10^9\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{dm}^3 &= 1000\,\mathrm{cm}^3 = 10^6\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{cm}^3 &= 1000\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{mm}^3 &= (1000\,\mu)^3 = 10^9\,\mu^3\\
1\,\mu^3 &= (1000\,\mathrm{nm})^3 = 10^9\,\mathrm{nm}^3\\
1\,\mathrm{nm}^3 &= (1000\,\mathrm{pm})^3 = 10^9\,\mathrm{pm}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccr}
1\,\text{Liter} & = & 1\,\mathrm{l} & = & 1\,\mathrm{dm}^3\\
1\,\text{Hektoliter} & = & 1\,\mathrm{hl} & = & 100\,\mathrm{dm}^3\\
1\,\text{Milliliter} & = & 1\,\mathrm{ml} & = & 1\,\mathrm{cm}^3\\
1\,\text{Zentiliter} & = & 1\,\mathrm{cl} & = & 10\,\mathrm{cm}^3
\end{array}$$

# 6. Klasse

6.3. Volumen und Oberfläche des Quaders

6.3.1. Ein Quader mit den Kantenlängen a, b und chat das Volumen

$$V = a \cdot b \cdot c$$

6.3.2. Die Oberfläche des Quaders berechnet sich durch:

$$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

6.3.3. Die Gesamtkantenlänge ergibt sich durch $k = 4 \cdot (a + b + c)$

6.3.4. Für einen Würfel mit der Kantenlänge a ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$V = a^3 \qquad A = 6 \cdot a^2 \qquad k = 12 \cdot a$$

Quelle: Universität Bayreuth Projekt SMART
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik, Universität Bayreuth
Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (Z-MNU)